

SOLIDWORKS SUMMIT RUSSIA 2019

16 октября 2019 г.





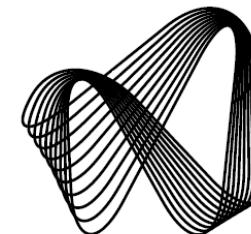
3DEXPERIENCE®

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ

МКЭ

ПРИМЕНЕНИЕ НА

Никита Колотилов | ООО КАДИС



CADIS

www.cad-is.ru

ООО «КАДИС»

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ И
ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

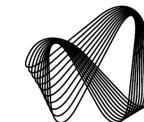


Авторизованные партнеры

С 2015 ГОДА ЗАНИМАЕМСЯ РАСЧЕТАМИ И ПРОВОДИМ
ОБУЧЕНИЕ МКЭ

AUTHORIZED
Reseller

с 2019 года



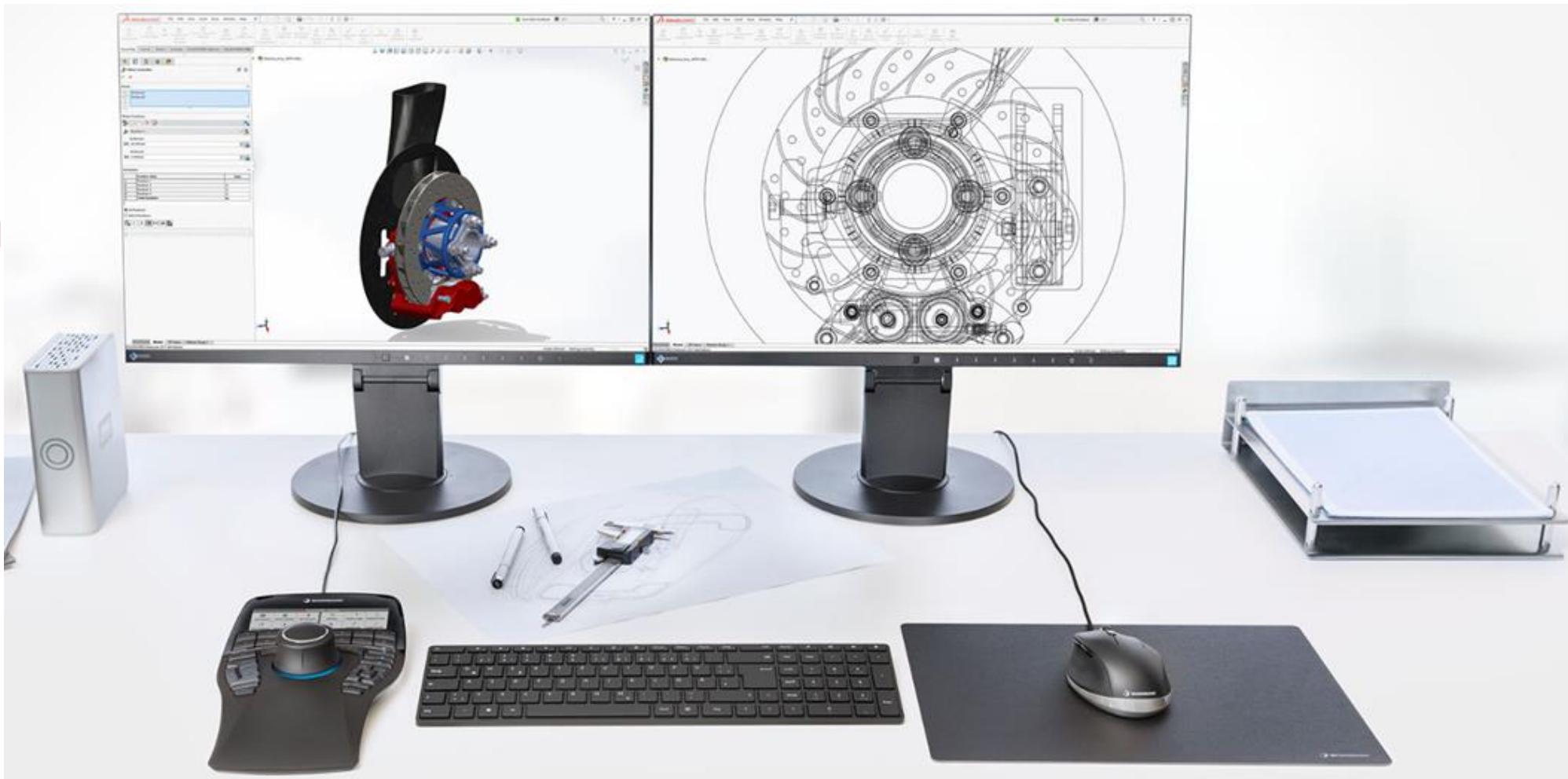
C A D I S
www.cad-is.ru

DS DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

Авторизованные партнеры



РАБОЧЕЕ
МЕСТО
ИНЖЕНЕРА

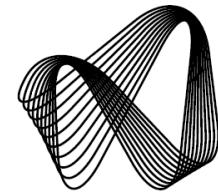


CADIS
www.cad-is.ru

DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

КОМПЕТЕНЦИИ

ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБУЧЕНИЕ И
ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

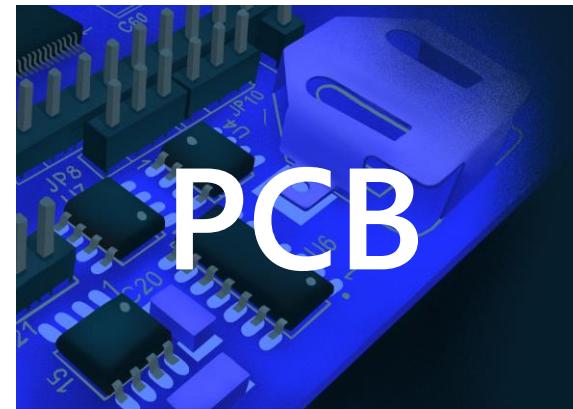


C A D I S

www.cad-is.ru

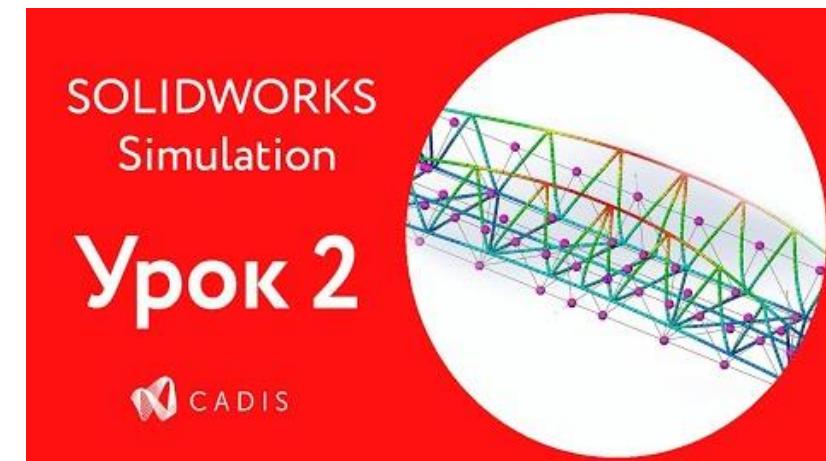
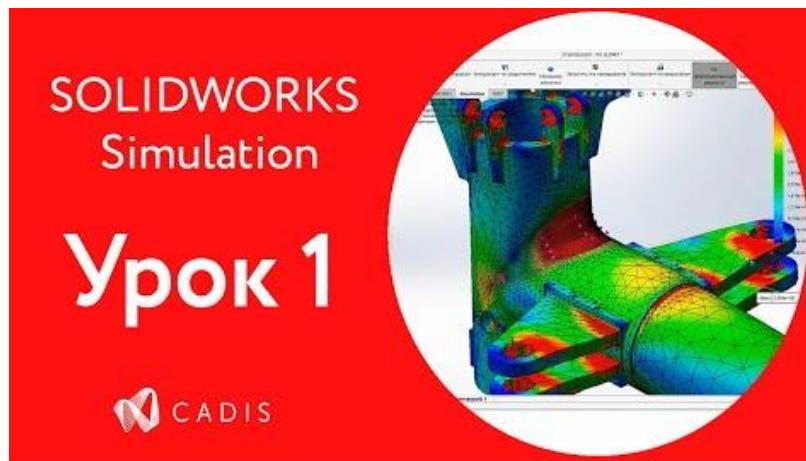


НАПРАВЛЕНИЯ РАБОТ

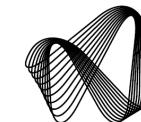


ОБУЧЕНИЕ SIMULATION

YOUTUBE CADIS



ОНЛАЙН/ОФЛАЙН ОБУЧЕНИЕ
ВЕБИНАРЫ



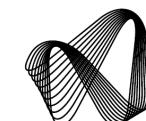
C A D I S
www.cad-is.ru

DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

НАШИ КЛИЕНТЫ



ЦКТИ-ВИБРОСЕЙСМ



C A D I S
www.cad-is.ru



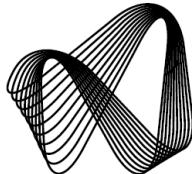
Северсталь



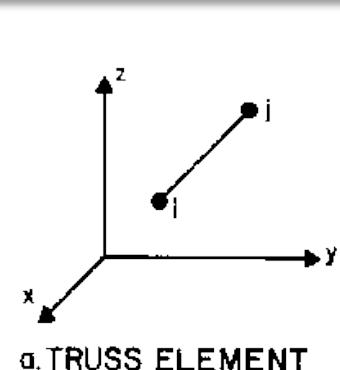
DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

ТЕОРИЯ МКЭ

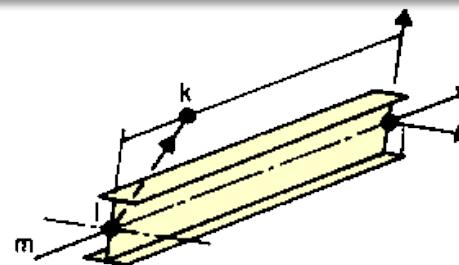
Практическое применение



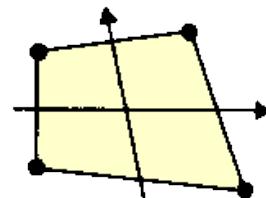
CADIS
www.cad-is.ru



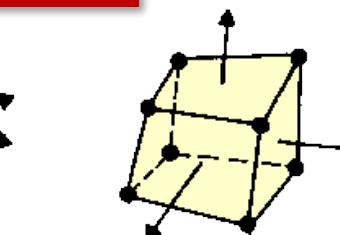
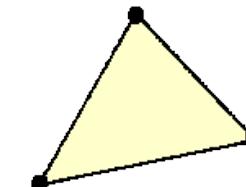
a. TRUSS ELEMENT



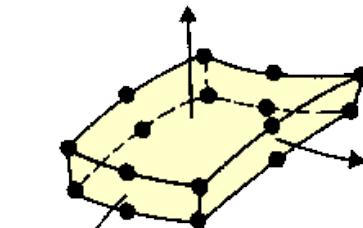
b. THREE-DIMENSIONAL BEAM ELEMENT



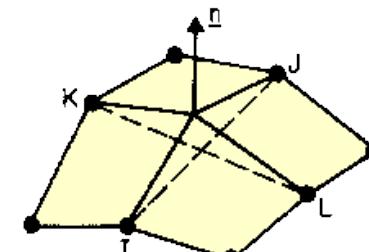
c. PLANE STRESS, PLANE STRAIN
AND AXISYMMETRIC ELEMENTS



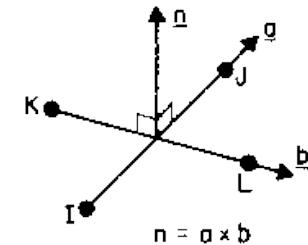
d. THREE-DIMENSIONAL SOLID



e. VARIABLE-NUMBER-NODES
THICK SHELL AND
THREE-DIMENSIONAL ELEMENT

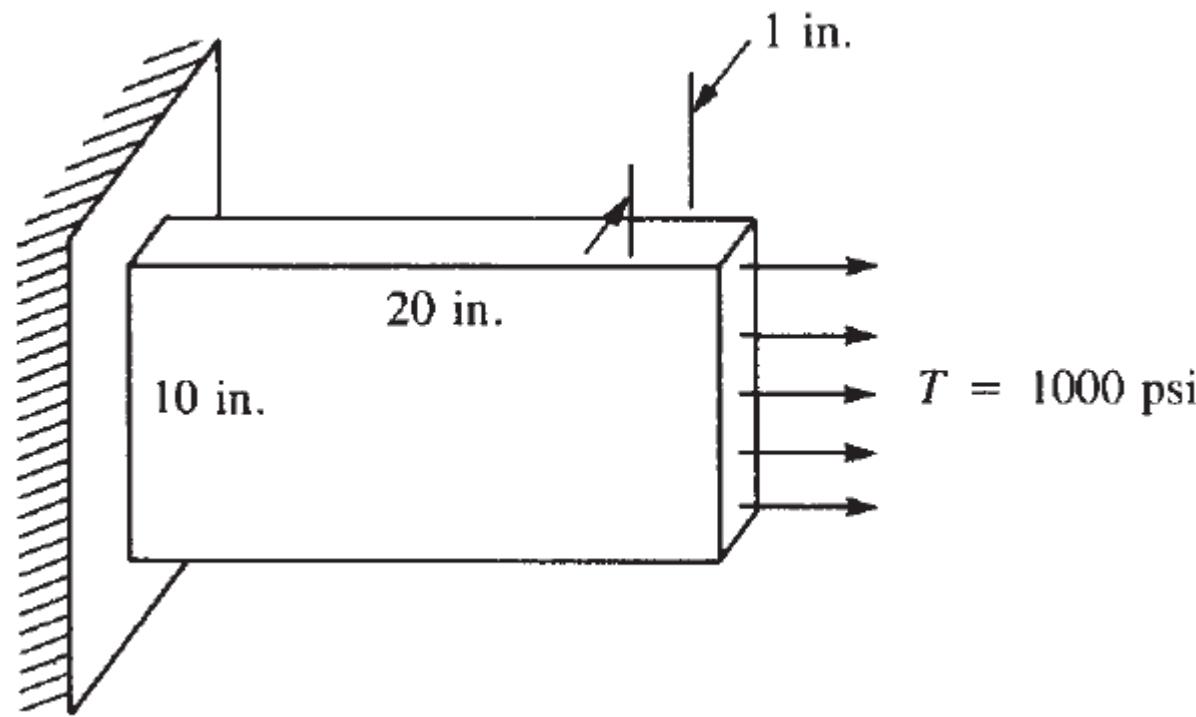


f. THIN SHELL AND BOUNDARY ELEMENT



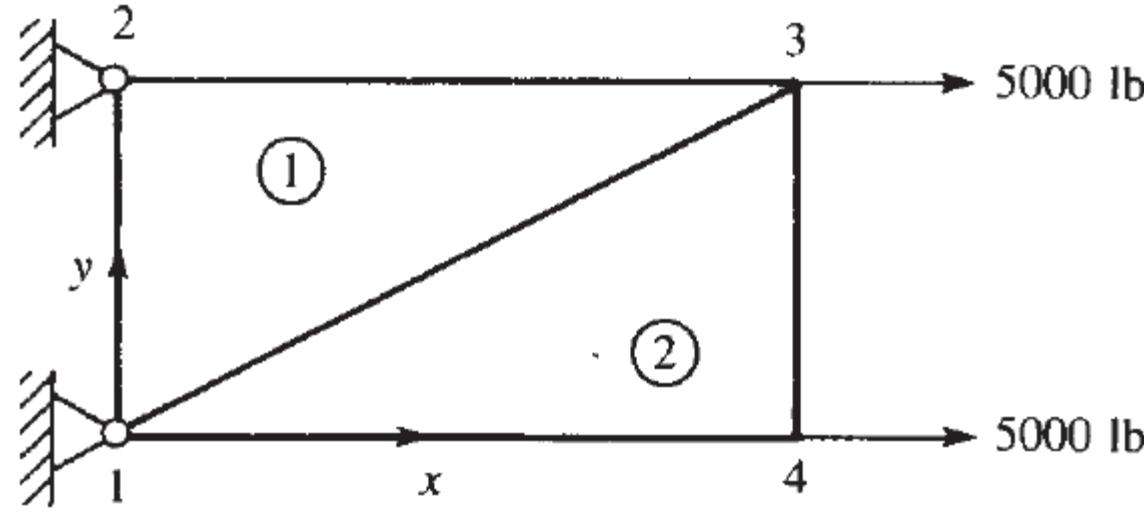
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ



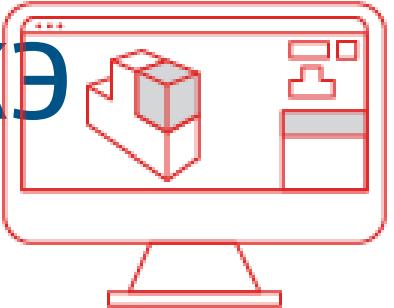
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ



$$\{F\} = [K]\{d\}$$

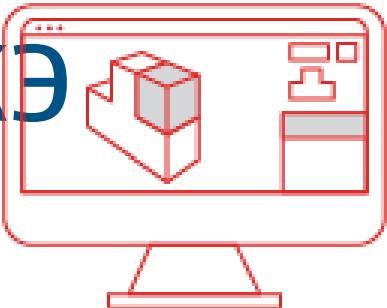
$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ 5000 \\ 0 \\ 5000 \\ 0 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$



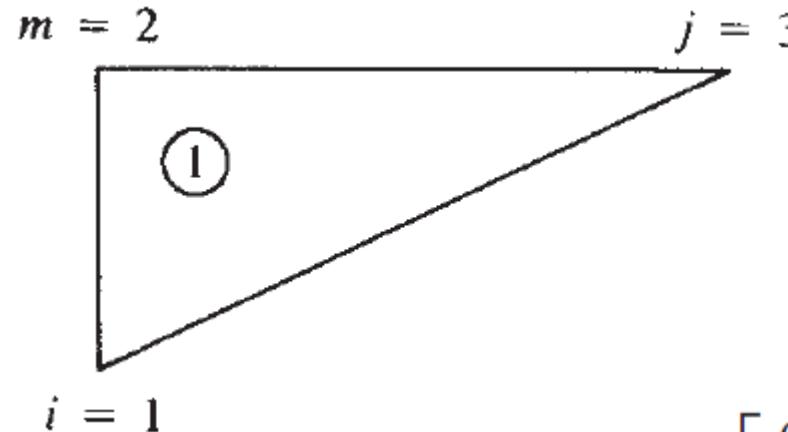
Для элементов высшего порядка следует использовать специальные преобразования для распределенных внешних сил в узловые. Для элементов CST (Constant Strain Triangle) статически эквивалентная замена силы может быть использована напрямую.

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

СБОРКА МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ



$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$



$$[k^{(1)}] = \frac{75,000}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_2 & v_2 \\ 140 & 0 & 0 & -70 & -140 & 70 \\ 0 & 400 & -60 & 0 & 60 & -400 \\ 0 & -60 & 100 & 0 & -100 & 60 \\ -70 & 0 & 0 & 35 & 70 & -35 \\ -140 & 60 & -100 & 70 & 240 & -130 \\ 70 & -400 & 60 & -35 & -130 & 435 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$

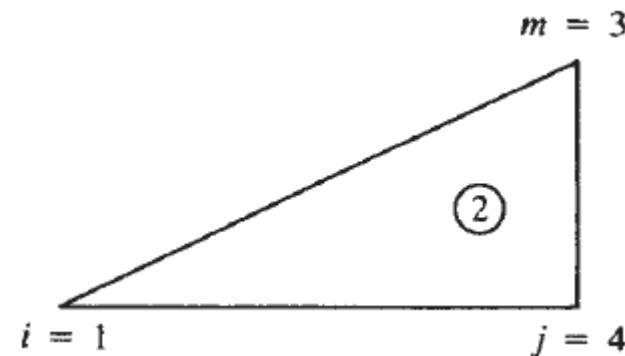
$$A = \frac{1}{2}bh \quad [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

СБОРКА МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ

$$[k] = tA[B]^T[D][B]$$

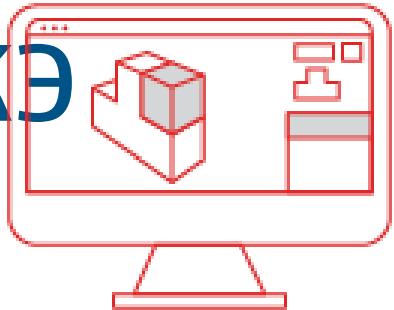


$$[k^{(2)}] = \frac{75,000}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 & u_3 & v_3 \\ 100 & 0 & -100 & 60 & 0 & -60 \\ 0 & 35 & 70 & -35 & -70 & 0 \\ -100 & 70 & 240 & -130 & -140 & 60 \\ 60 & -35 & -130 & 435 & 70 & -400 \\ 0 & -70 & -140 & 70 & 140 & 0 \\ -60 & 0 & 60 & -400 & 0 & 400 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$

$$A = \frac{1}{2}bh \quad [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad [D] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

СБОРКА МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ



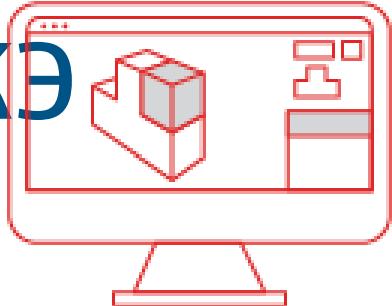
$$[k^{(1)}] = \frac{375,000}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 28 & 0 & -28 & 14 & 0 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 12 & -80 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -20 & 12 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 14 & -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$

$$[k^{(2)}] = \frac{375,000}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -20 & 12 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & -14 & 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 0 & 0 & 28 & 0 & -28 & 14 \\ -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 80 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$

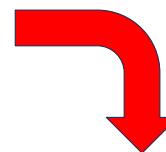
$$[K] = \frac{375,000}{0.91} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\ 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\ -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\ 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\ -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\ -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\ 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87 \end{bmatrix} \text{ lb/in.}$$

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

СБОРКА МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ



$$\begin{bmatrix}
 R_{1x} \\
 R_{1y} \\
 R_{2x} \\
 R_{2y} \\
 \hline
 5000 \\
 0 \\
 5000 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \left(-\frac{375,000}{0.91} \right)
 \begin{bmatrix}
 48 & 0 & -28 & 14 & 0 & -26 & -20 & 12 \\
 0 & 87 & 12 & -80 & -26 & 0 & 14 & -7 \\
 -28 & 12 & 48 & -26 & -20 & 14 & 0 & 0 \\
 14 & -80 & -26 & 87 & 12 & -7 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & -26 & -20 & 12 & 48 & 0 & -28 & 14 \\
 -26 & 0 & 14 & -7 & 0 & 87 & 12 & -80 \\
 -20 & 14 & 0 & 0 & -28 & 12 & 48 & -26 \\
 12 & -7 & 0 & 0 & 14 & -80 & -26 & 87
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4
 \end{bmatrix}$$

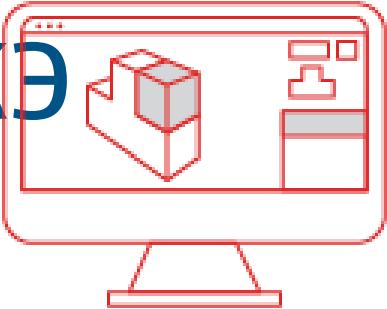


$$\begin{bmatrix}
 5000 \\
 0 \\
 5000 \\
 0
 \end{bmatrix}
 = \frac{375,000}{0.91}
 \begin{bmatrix}
 48 & 0 & -28 & 14 \\
 0 & 87 & 12 & -80 \\
 -28 & 12 & 48 & -26 \\
 14 & -80 & -26 & 87
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4
 \end{bmatrix}$$

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И
НАПРЯЖЕНИЙ

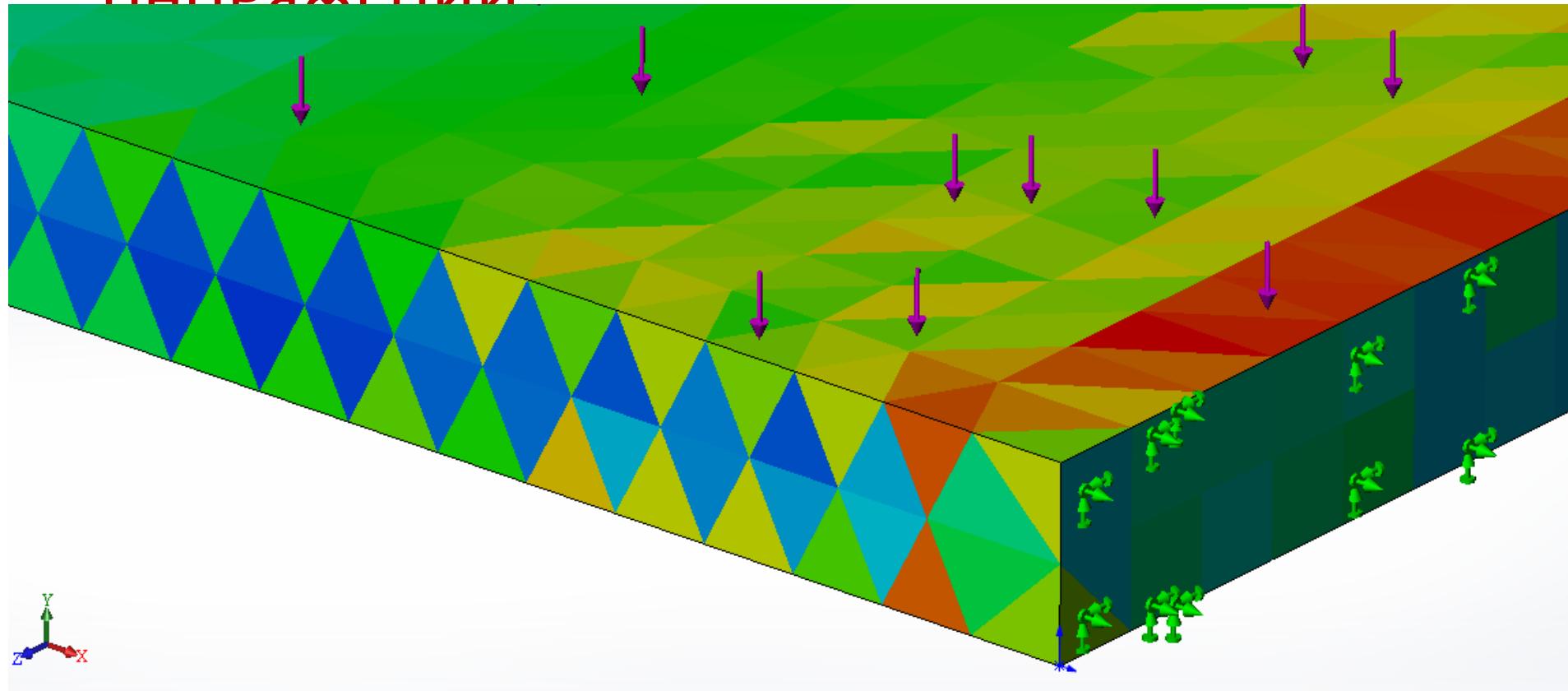
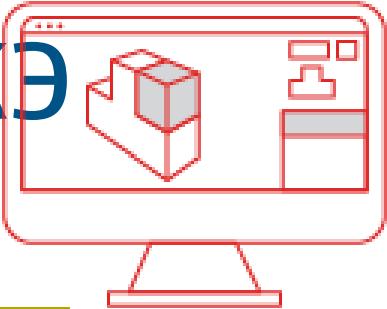
$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\}$$



$$\{\sigma\} = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \times \left(\frac{1}{2A}\right) \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & \beta_3 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_3 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \gamma_3 & \beta_3 & \gamma_2 & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

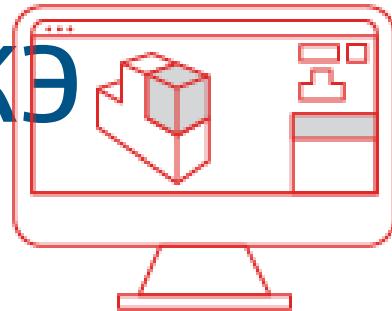
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И
НАПРЯЖЕНИЙ



РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА

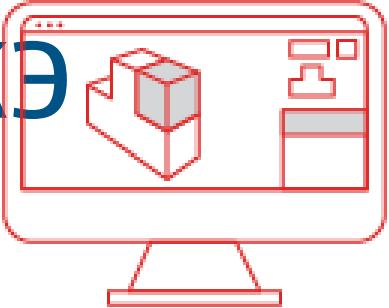


Вывод матриц жесткости каждого элемента в глобальной системе координат является чрезвычайно сложной задачей (если даже возможной), за исключением самых простых элементов, таких как треугольник постоянной деформации.

- Для решения этой проблемы была разработана изопараметрическая формулировка.
- Изопараметрическая формулировка позволяет создавать элементы, которые являются непрямыми и
- имеют изогнутые стороны.

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

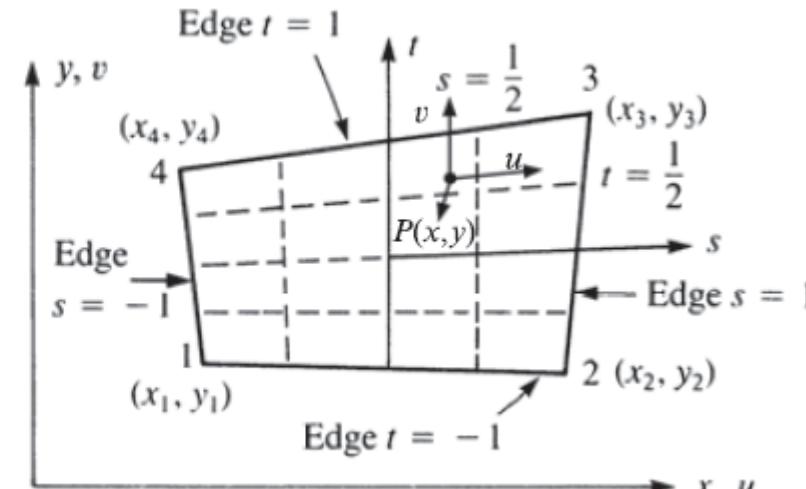
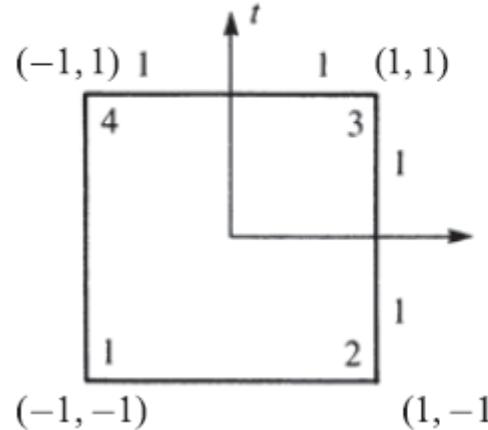
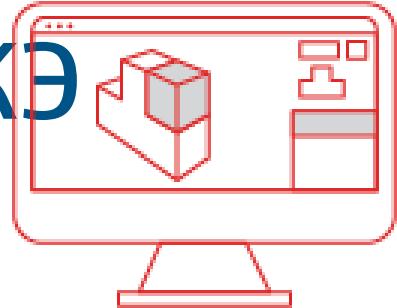
ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА



- Термин изопараметрический означает использование одних и тех же уравнений для определения геометрической формы элемента и перемещений внутри элемента (функции формы, интерполяционные функции).
- Таким образом, функции формы используются для описания узловых координат элементов, следовательно, и для описания физической формы элементов.
- Уравнения изопараметрических элементов формулируются с использованием внутренней (естественной) системы координат, которая определяется геометрией элемента, а не ориентацией элемента в глобальной системе координат.
- Существует связь между естественной и глобальной системами координат для каждого элемента

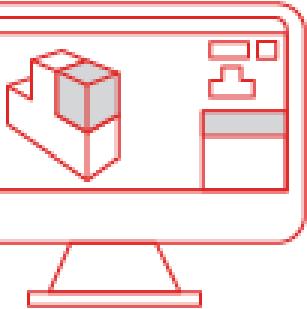
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА

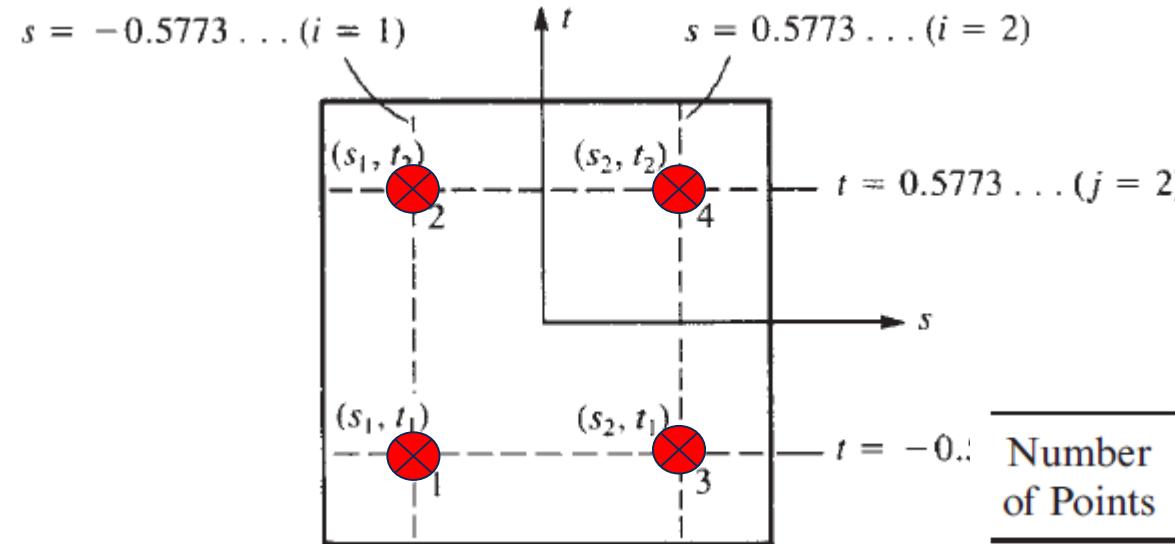


$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B]h|[J]| ds dt$$

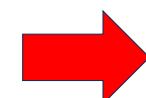
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ



ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ГАУССУ



$$\int_{-1}^1 y(x) dx = \sum_{i=1}^n W_i y_i$$

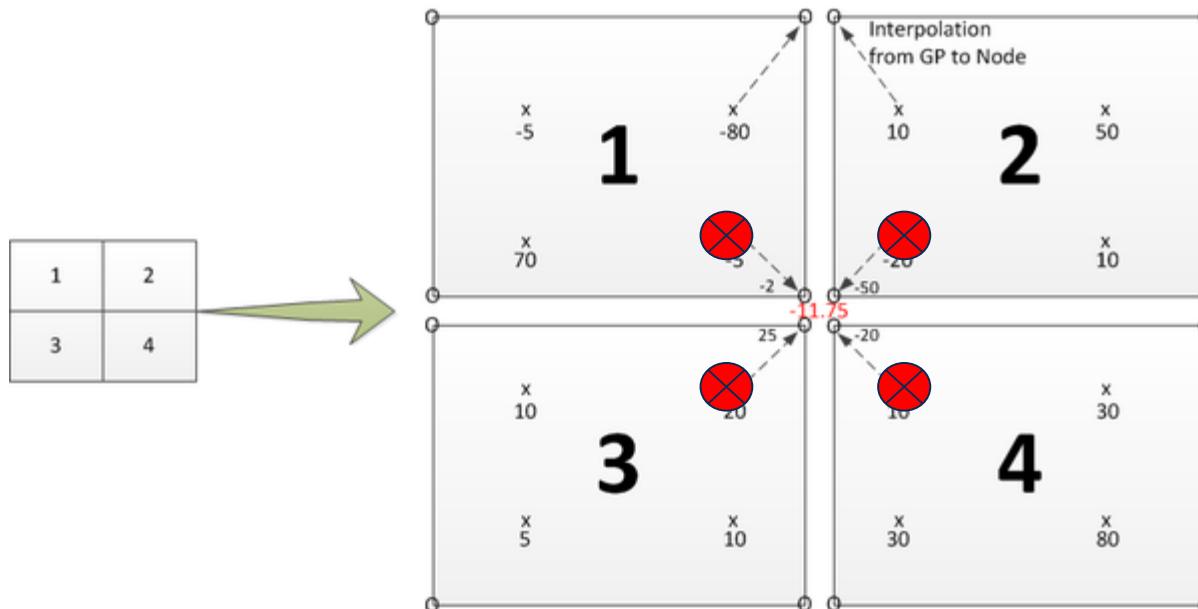
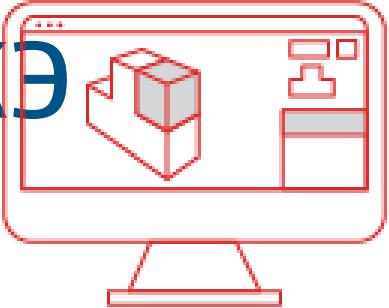


Точки, в которых вычисляются напряжения, называются точками интегрирования или точками Гаусса

Number of Points	Locations, x_i	Associated Weights, W_i
1	$x_1 = 0.000 \dots$	2.000
2	$x_1, x_2 = \pm 0.57735026918962$	1.000
3	$x_1, x_3 = \pm 0.77459666924148$ $x_2 = 0.000 \dots$	$\frac{5}{9} = 0.555 \dots$ $\frac{8}{9} = 0.888 \dots$
4	$x_1, x_4 = \pm 0.8611363116$ $x_2, x_3 = \pm 0.3399810436$	0.3478548451 0.6521451549

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МКЭ

УЗЛОВОЕ ОСРЕДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ



- Напряжения, полученные в точках интегрирования (точках Гаусса), экстраполируются в ближайшие узлы.
- Для получения непрерывного контура результатов, постпроцессор **усредняет** вычисленные экстраполируемые значения.

«Давно пора проверять сопромат с помощью
МКЭ, а не наоборот»
Умный человек

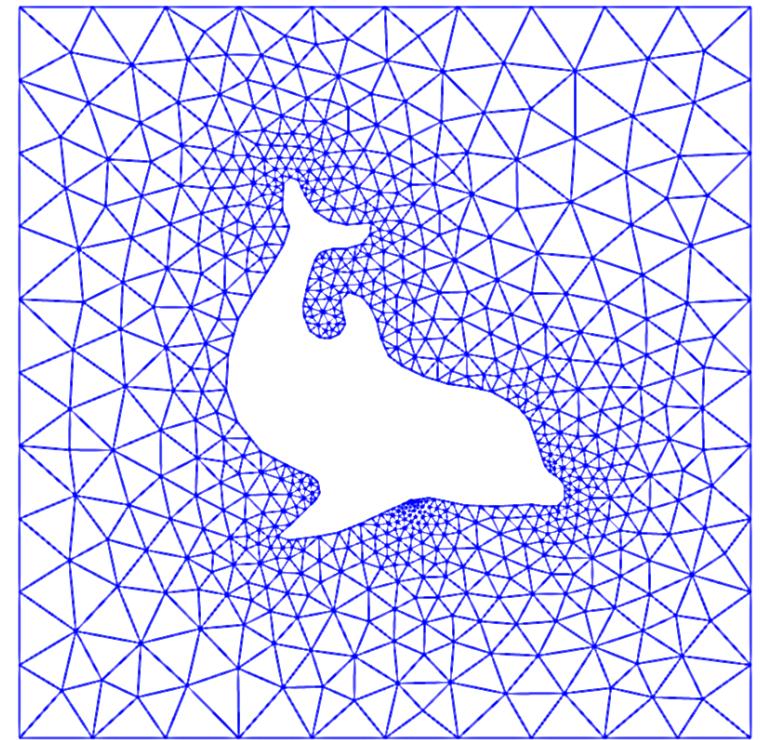


Image courtesy of Resemin S.A

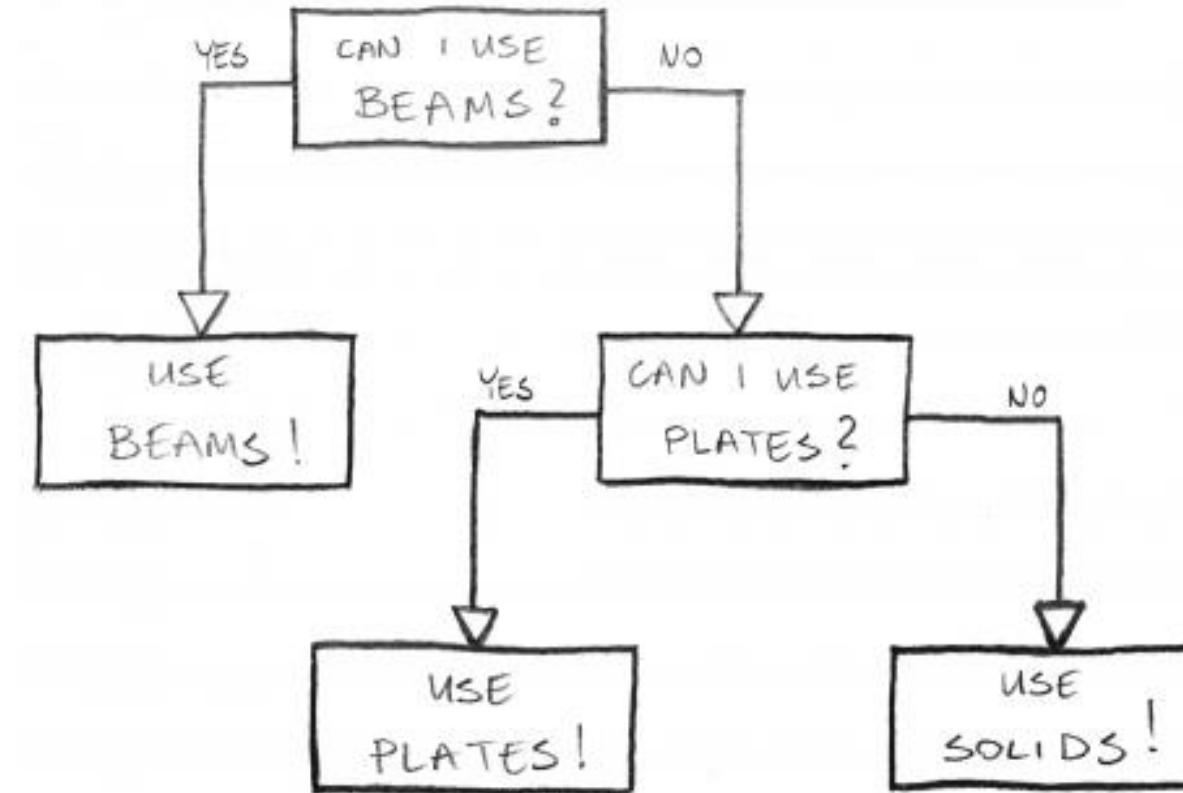
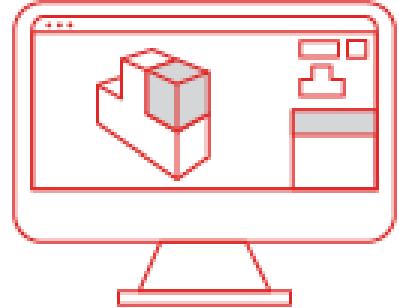


C A D I S
www.cad-is.ru

DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

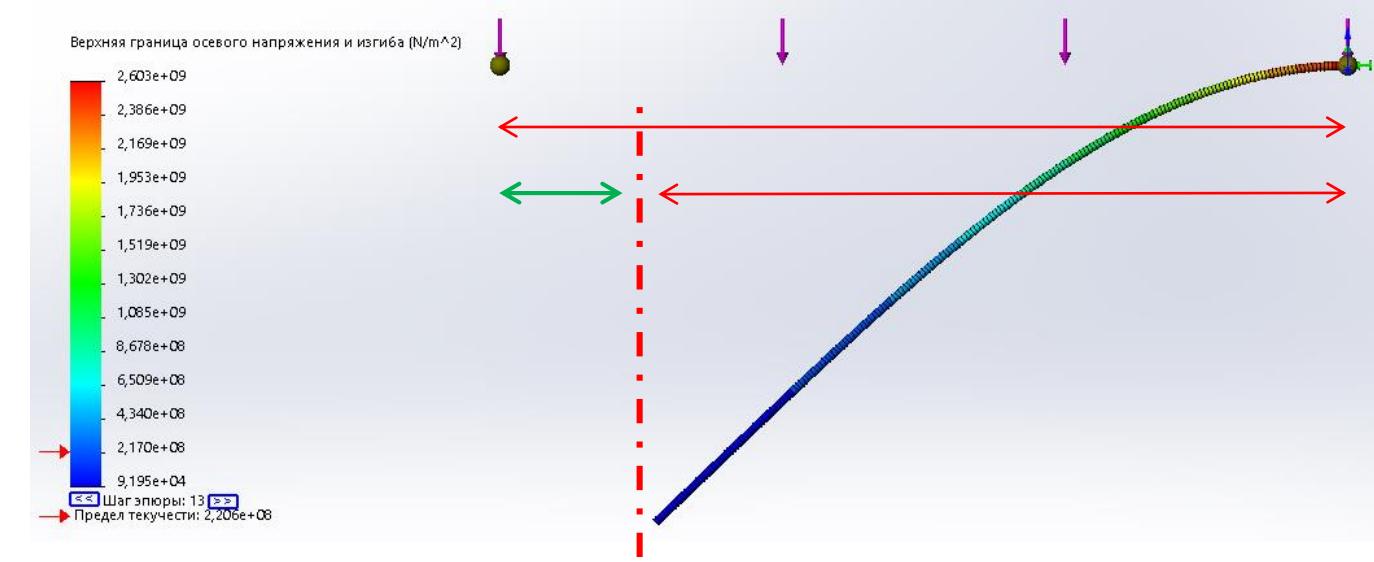
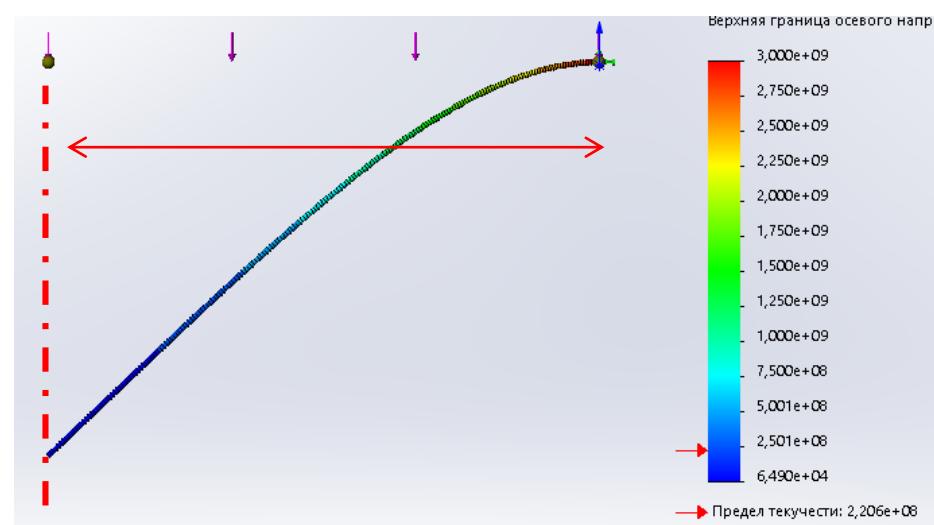
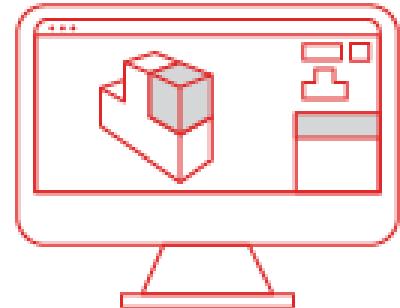
ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

КАКОЙ ТИП ЭЛЕМЕНТОВ ВЫБРАТЬ?



ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

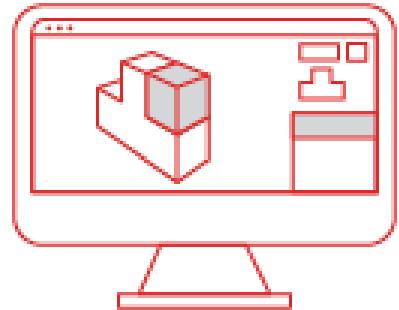
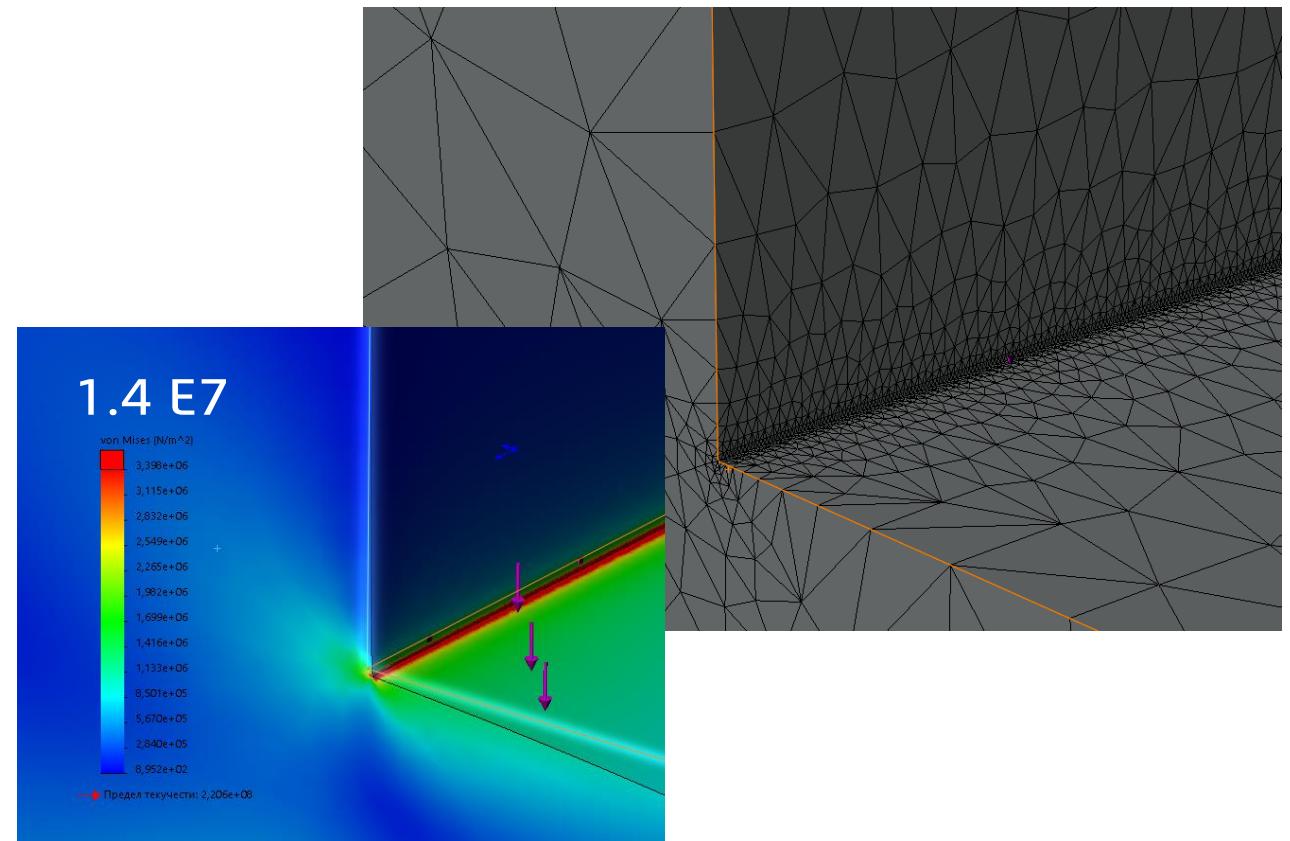
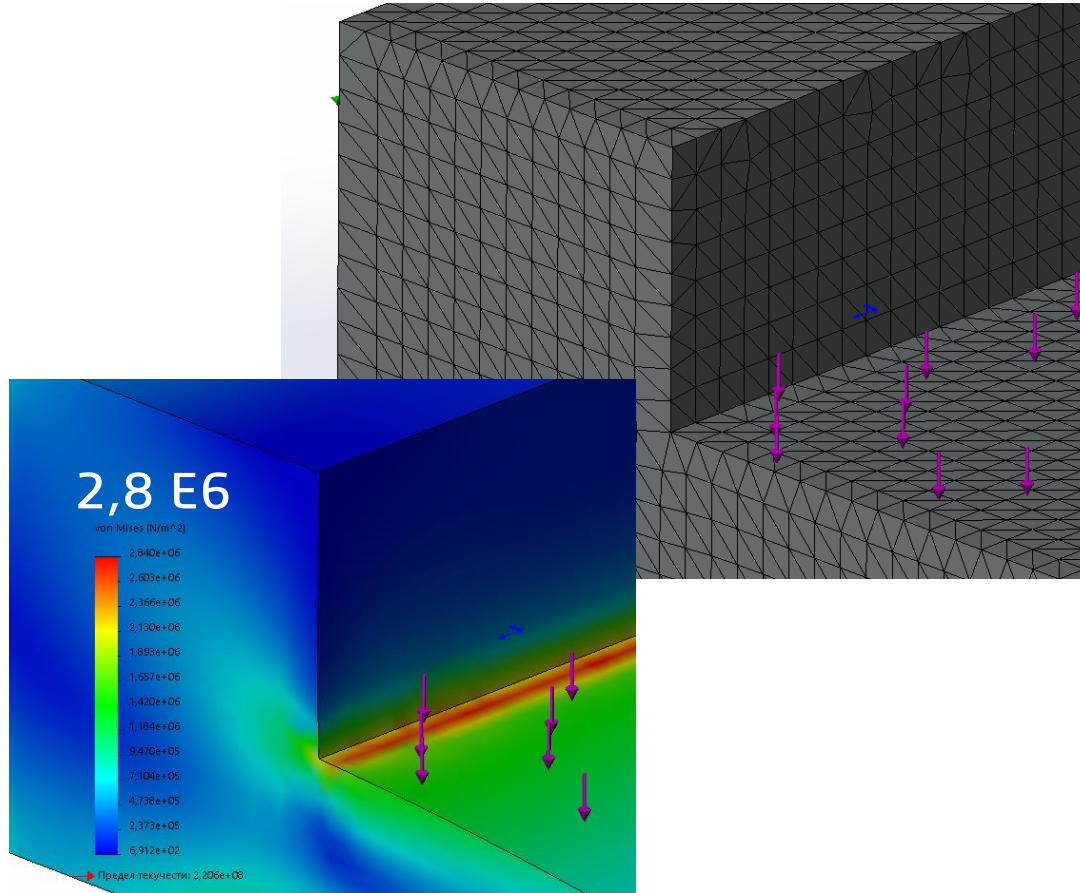
ЛИНЕЙНЫЙ ИЛИ НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ?



Если есть разница между линейным и нелинейным анализом, стоит выбрать **нелинейное решение**. Как правило, в нелинейном анализе перемещения и напряжения будут **меньше** чем в линейном.

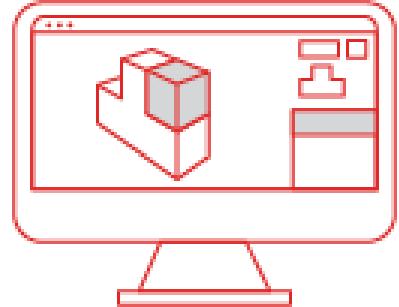
ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

СИНГУЛЯРНОСТЬ



ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

СИНГУЛЯРНОСТЬ



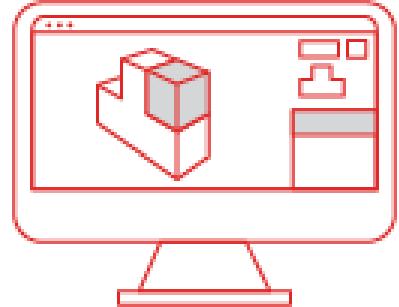
Игнорировать. Самый простой по затраченным ресурсам вариант. В таком случае мы имеем в модели большие напряжения, понимаем, что это сингулярность и авторитетно заявляем, что ничего страшного - это маленькая область, напряжения срелаксируют в пластическое течение металла и остальной конструкции не повредят. На эпюрах в отчете либо корректируем шкалу, либо оставляем как есть и комментируем в тексте.

Разрешить. В смысле - получить решение. В реальной модели острых углов нет, там всегда есть радиус скругления. А вот для радиуса скругления, в отличие от острого угла, можно получить конечное решение и сеточную сходимость. Этот вариант самый дорогой по машинным ресурсам, поэтому редко бывает целесообразным. К тому же, предел текучести, вполне вероятно, все равно будет превышен.

Учесть пластику. Бесконечные напряжения возникают только если модель материала линейная. Если же заложить в модель хотя бы упруго-пластическую модель Прандтля, то при достижении в точке сингулярности предела текучести напряжения перестанут расти, внутренние усилия будут перераспределяться на соседние точки.

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

СИНГУЛЯРНОСТЬ



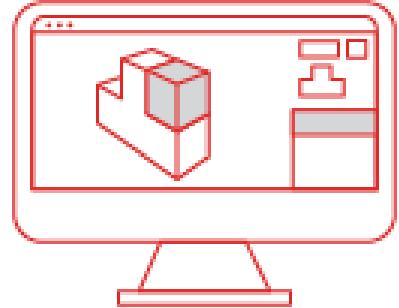
Если область пластического течения получится небольшая, то мы можем сказать "да, пластика будет, но это не страшно".

Отличие от первого варианта в том, что мы это показали и доказали расчетом, а не просто опирались на интуицию и опыт.

Иногда, в результате учета пластики, мы увидим, что под действием имеющихся нагрузок образуется **«пластический шарнир»**, течет целое поперечное сечение модели, а значит деталь разделяется на две части, разрушается со всеми вытекающими.

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ



Верификация – процесс установления соответствия между численной моделью и математической моделью.

- Проверка качества сетки
- Проверка суммарной массы модели
- Модальный анализ
- Смещение модели как жесткого целого
- Анализ сходимости результатов
- Оценка ошибки усреднения

ПРИМЕНЕНИЕ НА ПРАКТИКЕ

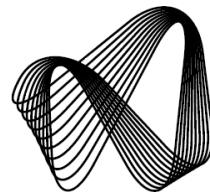
ВАЛИДАЦИЯ МОДЕЛИ

Валидация – процесс определения степени соответствия расчетной модели реальному физическому объекту в рамках области планируемого использования данной модели.

Ни один из этапов верификации не позволяет определить, насколько выбранные модели адекватны объекту исследования.

Оценка соответствия численной модели реальному миру относится к задачам валидации, которая позволяет определить, насколько физические явления и законы, включенные исследователем в расчетную модель, соответствуют постановке исходной задачи и достаточны для получения требуемых решений.

ПРЕДЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КЛИЕНТОВ



CADIS

www.cad-is.ru



ЧТО МЫ МОЖЕМ ПРЕДЛОЖИТЬ
ВАМ

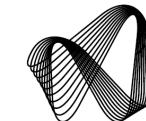
:DS.COM/SOLIDWORKS © Dassault Systèmes | Confidential Information | 11/20/2019 | ref.: 3DS_Document_2014

Специальные предложения от CADIS пользователям SOLIDWORKS

X1



БЕСПЛАТН
О



C A D I S
www.cad-is.ru

DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

ЧТО МЫ МОЖЕМ ПРЕДЛОЖИТЬ
ВАМ

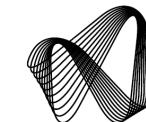
:DS.COM/SOLIDWORKS © Dassault Systèmes | Confidential Information | 11/20/2019 | ref.: 3DS_Document_2014

Специальные предложения от CADIS пользователям SOLIDWORKS

X1



БЕСПЛАТН
О



C A D I S
www.cad-is.ru

DASSAULT SYSTEMES | The 3DEXPERIENCE® Company

